$GL(n, \mathbb{R})$

§ Однопараметрические подгруппы

Опр.] G — топ. группа

Однопар. подгруппа γ — это

$$\gamma : \mathbb{R} \to G$$

непрер. гомоморфизм.

Однопар. подг. — это не подгруппа, а путь.

Теор.] γ — однопар. подгр. гр. $GL(n, \mathbb{R})$

Тогда $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ и

$$\gamma(t) = e^{tA}, \quad A \in M(n, \mathbb{R})$$

Док.] $\gamma \in C^1$

$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \quad \begin{cases} \gamma'(s) = \gamma'(0)\gamma(s) \\ \gamma(0) = I \end{cases}$$

$$\gamma(s) = e^{sA}, \quad A = \gamma'(0).$$

? $\gamma \in C^1$.] $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$\alpha \geq 0$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t-s)\gamma(s)\,ds$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\gamma(t-s)\,ds =$

$$= \gamma(t)B, \quad B = \int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\gamma(-s)\,ds$$

] $\int_{\mathbb{R}} \alpha(s)\,ds = 1$ $\quad$ supp $\alpha \subset V$

$$s \in V \Rightarrow \|\gamma(-s) - I\| < \varepsilon$$

Тогда $\|B - I\| \leq \varepsilon$ $\blacktriangle$

§ Алгебра Ли линейной группы Ли

] G — лин. гр. Ли $< GL(n,\mathbb{R})$

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \exp tX \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Теор. $\mathrm{Lie}(G)$ — ~~вещ.~~ вект. пр-во, замкнутое относительно матр. коммутатора

Док. $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\left(\exp\frac{tX}{k}\exp\frac{tY}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \exp[t(X+Y)] \in G$$

$$\Rightarrow X+Y \in \mathrm{Lie}(G)$$

$t>0$

$$\left(\exp\frac{\sqrt{t}X}{k}\exp\frac{\sqrt{t}Y}{k}\exp\frac{-\sqrt{t}X}{k}\exp\frac{-\sqrt{t}Y}{k}\right)^{k^2} \to$$

$$\to \exp\left(t[X,Y]\right) \in G$$

$t<0$ $\quad X \leftrightarrow Y \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \in \mathrm{Lie}(G)$ ▲

Опр. Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ наз. вектор. пр-во, наделённое бинарной операцией

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$(X,Y) \to [X,Y]$$

скобка Ли

со свойствами

1) билинейность

2) $[X, Y] = -[Y, X]$

3) Тождество Якоби:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Вещ. или компл. ал. Ли, конечномерн.

$$[X, Y] = XY - YX$$

$M(n, \mathbb{R})$

$M(n, \mathbb{C})$ ↗

$\mathrm{Lie}(G)$

Примеры.

1) $\mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$

$\mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$

2) $\mathrm{Lie}(SL(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) =$

$= \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$

$\ln \det B = \operatorname{tr} \ln B, \quad B = e^X$

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$

3) $\mathrm{Lie}(SO(n)) = \mathfrak{so}(n) = \{X \mid X^T = -X\}$

$$\exp X^T = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}$$

$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$

4) $Lie\,(U(n)) = u(n) = \{ X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X \}$

5) $Lie\,(SU(n)) = su(n) = \{ X \mid X^* = -X, \ \operatorname{tr} X = 0 \}$

6) $sl(2, \mathbb{R})$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

7) Ал. Ли аф. гр. прямой

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a + bx, by)$$

$a, x \in \mathbb{R}$ $\quad b, y > 0.$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by & bx + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp tX = \begin{pmatrix} b(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} b'(0) & a'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X_2$$

Опред. $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Ал. Ли. $\mathfrak{g}$ гомоморфна ал. Ли $\mathfrak{h}$, если $\exists$ лин. отобр.

$$A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h},$$

сохр. ск. Ли

$$A[X, Y] = [AX, AY]$$

$Aut(\mathfrak{g})$ – группа всех автоморф. ал. Ли $\mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{g} = Lie(G)$$

$$g \exp X g^{-1} = \exp(g X g^{-1})$$

$$g \in G$$

$$X \in Lie(G) \Rightarrow g X g^{-1} \in Lie(G)$$

$$Ad(g) : X \to g X g^{-1}$$

$$A_g h = g h g^{-1}$$

и

$$Ad(g) \in Aut(Lie(G)) :$$

$$g(X \underset{g^{-1}g}{\wedge} Y - Y \underset{g^{-1}g}{\wedge} X) g^{-1} = [g X g^{-1}, g Y g^{-1}]$$

$$Ad(g)[X, Y] = [Ad(g)X, Ad(g)Y]$$

$$Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \cdot Ad(g_2)$$

$$\Rightarrow \quad Ad : G \to Aut(\underline{\underline{Lie}}(G))$$

гомоморф. – присоед. представлени

Teo. $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad(\exp tX) = ad X$

$ad X(Y) = [X,Y] = XY - YX$

$X, Y \in Lie(G)$

Док. $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad(\exp tX)Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp tX \cdot Y \cdot \exp(-tX))$

$= XY - YX = ad X(Y)$ ▲

Следствие $Ad \exp X = \underline{\underline{Exp}}\, ad X$

$X \in Lie(G)$

Exp: exp: $L(\mathfrak{g}) \longrightarrow \underline{\underline{GL(\mathfrak{g})}}$

$\mathfrak{g} = Lie(G)$

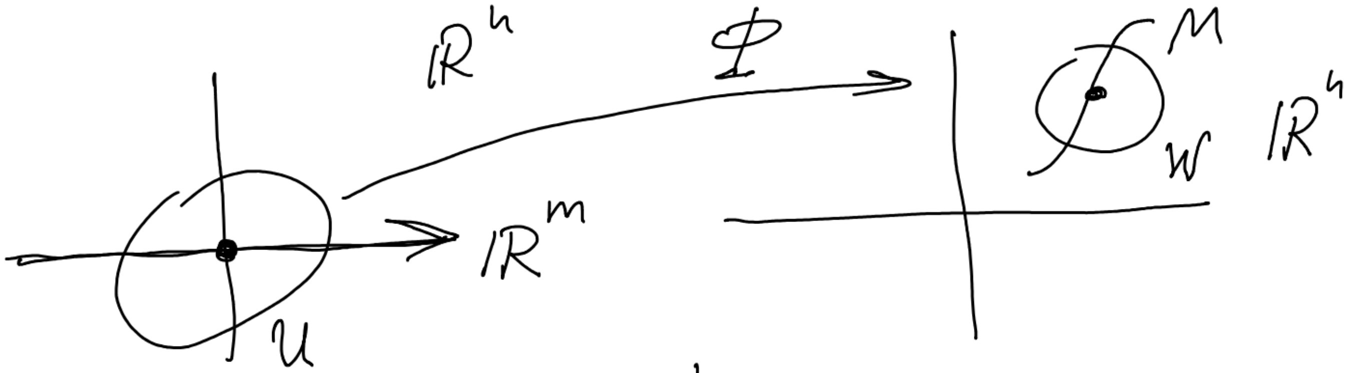
Док. $Ad \exp tX$ и $Exp\, t\, ad X$

$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$ $ad X$ (Упр.) ▲

§ Линейные гр. Ли как подмногообр.

Опр. M наз. подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ размерности m, если $M \subset \mathbb{R}^n$

n $\forall x \in M$



$\exists$ окр. $U \ni 0$ в $\mathbb{R}^n$ и

окр. $W \ni x$ в $\mathbb{R}^n$ и

диффеоморфизм $\Phi : U \to W$

такие, что $\Phi(U \cap \mathbb{R}^m) = W \cap M$

$\mathbb{R}^{n^2} \simeq M(n, \mathbb{R})$

Лемма] G — лин. гр. Ли

] $g_n \in G$, $g_n \neq I$, $g_n \to I$

Тогда точки накопления

$$X_n = \frac{\ln g_n}{\|\ln g_n\|}$$

лежат в $Lie(G)$.

Док.] $X_n \to X$ $\exp tX$

$Y_n = \ln g_n$ $\|Y_n\| \to 0$

$\lambda_n = \frac{t}{\|Y_n\|}$

$\lambda_n Y_n = tX_n \longrightarrow tX$ $e^{Y_n} = g_n$

$$e^{\lambda_n Y_n} = e^{(\lambda_n - [\lambda_n])Y_n} \longrightarrow I \cdot g_n^{[\lambda_n]}$$

$$\|(\lambda_n - [\lambda_n])Y_n\| \longrightarrow 0$$

$$e^{tX} = \lim e^{\lambda_n Y_n} = \lim g_n^{[\lambda_n]} \in G$$

$$\Rightarrow X \in Lie(G) \quad \triangle$$

Следствие ∃ $\mathfrak{m}$ – доп. пр-во к $\mathfrak{g} = Lie(G)$ в $M(n, \mathbb{R})$

Тогда ∃ окр. $U \ni 0$ в $\mathfrak{m}$ такая, что

$$(\exp U) \cap G = \{I\}$$

Док. от противного

∃ $X_n \in \mathfrak{m}$, $X_n \longrightarrow 0$, $\exp X_n \in G$.

Тогда точки накопления $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ лежат в $Lie(G) = \mathfrak{g}$

∃ X – такая точка, но

$X \in \mathfrak{m}$ (в силу замкн. $\mathfrak{m}$)

$\Rightarrow X = 0$, против. $\|X\| = 1$ ▲

<u>Лемма</u>] E и F — доп. подпр-ва в $M(n, \mathbb{R})$

Тогда отображение

$$\Phi : E \times F \to GL(n, \mathbb{R})$$

$$\Phi(X, Y) = e^X \cdot e^Y$$

явл. дифференцируемым и

$$(d\Phi)_{(0,0)}(X, Y) = X + Y$$

В частности $\exists$ окр. $U \ni 0$ в E и окр. $V \ni 0$ в F такие, что

<u>$U \times V$</u> — Φ-диффеоморфно окр. I в $GL(n, \mathbb{R})$ ▲

<u>Теор.</u>] G — лин. гр. Ли и $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Тогда $\exists$ окр. $U \ni 0$ в $\mathfrak{g}$ и окр. $V \ni e$ в G такие, что

$\exp : U \to V$ — гомеоморфизм

($\Rightarrow$ диффеоморф.)

Док. ∃ окр. $U_0 \ni 0$ в $M(n,\mathbb{R})$

и окр. $V_0 \ni I$ в $GL(n,\mathbb{R})$:

$$\exp : U_0 \to V_0 \text{ — диффеоморф}$$

$$\Rightarrow \quad \exp : U_0 \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{в}} V_0 \cap G$$

это гладкое отобр, взаимн.-одн.

Но будет ли оно отобр. $\underline{\underline{\text{на}}}$?

∃ $\mathfrak{m}$ — доп. подпр. к $\mathfrak{g}$ в $M(n,\mathbb{R})$

$$U_0 = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{окр. } 0 \\ \text{в } \mathfrak{g}}}{U} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{окр. } 0 \\ \text{в } \mathfrak{m}}}{W} \leftarrow$$

$$\exists\ \Phi : U_0 \to \underset{\text{окр. } I \text{ в } GL(n,\mathbb{R})}{V_0} \text{ — диффеом}$$

$$\exists\ W : (\exp W) \cap G = \{I\}$$

Тогда как раз $\exp U = V_0 \cap G$:

$g \in V_0 \cap G$ $\quad g = e^X e^Y$

$X \in U$, $Y \in W$

$$\underset{\exp W}{\overset{}{\underset{\cap}{e^{Y}}}} = \underbrace{e^{-X} \cdot g}_{\text{из } G} \Rightarrow e^{Y} = I \Rightarrow$$

$$e^{X} = g$$

$$\underline{\Phi} : U_0 \to V_0 \quad \leftarrow \text{диффеом.}$$

$\Phi|_{\mathfrak{g}}$

$$\underline{\exp} : U_0 \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{на}} V_0 \cap G$$

$$\exp : \underset{\text{окр. } 0 \text{ в } M(n,\mathbb{R})}{U_1} \to \underset{\text{окр. } I \text{ в } GL(n,\mathbb{R})}{V_1} \quad \leftarrow \text{диффеом}$$

$$\underset{\text{окр. } 0 \text{ в } M(n,\mathbb{R})}{\tilde{U}_0} \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \tilde{V} = V_0 \cap V_1$$

$$\exp : \tilde{U} \cap \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{на}} \tilde{V} \cap G$$

$=$

Следствие Лин. гр. Ли явл. подмногообр. в $M(n, \mathbb{R})$ размерности $\dim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$

Док. $\Phi : U_0 \to W_0$ диффеом.

$$\exp : (U_0 \cap \mathfrak{g}) \to \underset{\text{окр. } e \text{ в } G}{\underline{W_0 \cap G}} \quad \text{диффеом.}$$

$$L_h \circ \Phi : U_0 \to hW_0$$

$h \in G$ $\qquad hW_0 \cap G$ – окр. h в G ▲

G – лин. гр. Ли

$\mathfrak{g} = Lie(G)$ $\qquad \exp \mathfrak{g}$ – окр. e в G

$$G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp \mathfrak{g})^n$$

↖ компонента e гр. G

Следств.

G – дискретна $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \{0\}$

Теор.] G – замкн. подгр $GL(n, \mathbb{R})$ – гр. Ли

] $X \in M(n, \mathbb{R})$

Тогда путь $t \to e^{tX}$ касается многообр. G при $t = 0$ $\Longleftrightarrow$

$e^{tX} \in G$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Док. $\Longleftarrow$ тривиально.

$\Longrightarrow$ От противного

] $e^{t_0 X} \notin G$ $\qquad$] φ_0 гладкая:

$\varphi_0(e^{t_0 X}) = 1$

$\varphi_0|_G = 0$

$0 \le \varphi_0 \le 1$

$$\varphi(g) = \int_G \varphi_0(gk)\,dk$$ dk – левоинв. мера на G

$g \in GL(n,\mathbb{R})$

$\varphi|_G = 0$ $\varphi(e^{t_0 X}) \neq 0$

$$\varphi(gh) = \int_G \varphi_0(ghk)\,dk = \int_G \varphi_0(gk)\,dk = \varphi(g)$$

$h \in G$

т.е. φ – постоянна на классах смежности $GL(n,\mathbb{R})/G$

т.е. постоянна на мн-вах вида gG, $g \in GL(n,\mathbb{R})$

$$f(t) = \varphi(e^{tX})$$

путь $s \longmapsto \underline{e^{tX}e^{sX}}$ будет касаться многообразия $e^{tX}G$ при $s=0$

$$f'(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi(e^{tX}e^{sX}) \equiv 0$$

$\Rightarrow f(t) \equiv 0$ – противоречие $f(t_0) \neq 0$

(т.к. $f(0)=0$)